

# Einführung in nichtkonforme Finite Elemente am Beispiel der Poisson-Gleichung

Tobias G. Pfeiffer\*

Freie Universität Berlin

26. September 2008

## Zusammenfassung

Es soll eine an [RT77] orientierte Einführung in die Theorie der nichtkonformen Finiten Elemente gegeben werden, d. h. solcher Funktionen, die an den Grenzen der Teilgebiete nicht notwendigerweise stetig sein müssen. Die Variationsformulierung, die die Grundlage für den bekannten Fall der konformen Finiten Elemente darstellt, wird unter Einführung eines Lagrange-Multiplikators in den hybriden Fall überführt, dann werden Bedingungen an die nichtkonformen, endlich-dimensionalen Funktionsräume gestellt, um Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu gewährleisten. Schließlich werden Beispiele für FEM-Räume gegeben, die diese Bedingungen erfüllen, und eine Fehlerabschätzung gezeigt.

## 1 Einführung

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit Lipschitz-Rand  $\Gamma$ . Für die Lösung der Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Nullrandbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{Poi}$$

definiert man üblicherweise ein Energiefunktional

$$J: v \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx$$

und kann dann zeigen, dass  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  genau dann (Poi) erfüllt, wenn es  $J$  minimiert, d. h.

$$\forall v \in C^2(\bar{\Omega}) : J(u) \leq J(v)$$

Sei  $H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \text{tr}_{\partial\Omega}(v) = 0\}$  und  $H^1(\Omega)$  der Sobolevraum der  $L^2$ -Funktionen mit schwachen ersten Ableitungen in  $L^2$  und der Norm

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Definiert man (Bi-)Linearformen

$$a: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \tag{1.1}$$

$$l: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \int_{\Omega} f v \, dx, \tag{1.2}$$

so ist diese Minimierungsaufgabe, nun in  $H_0^1(\Omega)$ , äquivalent zur Variationsformulierung:

---

\* eMail: tobias.pfeiffer@math.fu-berlin.de

**Problem (Var).** Finde  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : a(u, v) = l(v). \quad (1.3)$$

Nach dem Lax-Milgram-Lemma hat (Var) eine eindeutig bestimmte Lösung in  $H_0^1(\Omega)$ . Die Methode der Finiten Elemente besteht nun darin, einen endlich-dimensionalen Unterraum  $V_h$  von  $H_0^1(\Omega)$  zu finden und darin die Variationsaufgabe zu lösen. Nach dem Céa-Lemma existiert auch in  $V_h$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $u_h$  und für den Fehler zur „echten“ schwachen Lösung  $u$  gilt:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (1.4)$$

wobei  $c$  eine nur von der Bilinearform  $a$  abhängige Konstante ist.

## 2 Erweiterung der Variationsformulierung

Der Ansatz von *hybriden* Methoden ist es nach [BF91, S. 24], die Zerlegung des Gebiets  $\Omega$  in Teilgebiete  $\Omega_r$  bereits in die Variationsformulierung einfließen zu lassen. Das Vorgehen ist dabei, zunächst eine zu (Var) äquivalente Formulierung zu finden und dann die Bedingung der Stetigkeit an den Gebietsgrenzen abzuschwächen, so dass man eine *nichtkonforme* Lösung erhält, die nicht mehr notwendigerweise in  $H_0^1(\Omega)$  liegt.

Sei  $\{\Omega_r \mid r = 1, \dots, R\}$  eine Zerlegung von  $\Omega$  in Gebiete  $\Omega_r$  mit Lipschitz-Rand  $\partial\Omega_r$ . Man betrachte den Raum

$$X := \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega_r)\}$$

der Funktionen, die elementweise in  $H^1$  liegen, mit der Norm  $\|v\|_X := \left(\sum_{r=1}^R \|v\|_{H^1, \Omega_r}^2\right)^{1/2}$ . Es ist wichtig, zu bemerken, dass eine Funktion  $v \in X$  auf der gemeinsamen Grenze zweier Elemente  $\Omega_r$  und  $\Omega_s$  keinerlei Forderungen an die Stetigkeit genügt und auch durch Anwenden des Spursatzes nicht eindeutig festgelegt ist; der Ausdruck  $\text{tr}_{\partial\Omega_r \cap \partial\Omega_s}(v)$  ist nicht wohldefiniert. Um die Werte von  $v$  an einer solchen Grenze zu untersuchen, muss man den Spursatz auf  $v_r := v|_{\Omega_r} \in H^1(\Omega)$  und  $v_s = v|_{\Omega_s}$  einzeln anwenden, wobei im Allgemeinen *nicht*  $\text{tr}_{\partial\Omega_r \cap \partial\Omega_s}(v_r) = \text{tr}_{\partial\Omega_r \cap \partial\Omega_s}(v_s)$  gilt.

Nach [BF91, S. 5] bildet der Spur-Operator  $H^1(\Omega_r)$  surjektiv auf den Sobolevraum  $H^{1/2}(\partial\Omega_r)$  ab, wobei  $H^1(\partial\Omega_r) \subsetneq H^{1/2}(\partial\Omega_r) \subsetneq L^2(\partial\Omega_r)$ . Es soll im Folgenden  $v_r|_{\partial\Omega_r} := \text{tr}_{\partial\Omega_r}(v_r)$  geschrieben werden, um die Notation zu vereinfachen. Analog sei mit  $\int_{\partial\Omega_r} v_r$  das Integral über die Spur von  $v_r$  auf  $\partial\Omega_r$  gemeint.

Es ist offensichtlich, dass  $H_0^1(\Omega) \subset X$ , wobei  $v \in X$  genau dann in  $H_0^1(\Omega)$  liegt, wenn

- die Spuren von  $v_r$  und  $v_s$  auf  $\partial\Omega_r \cap \partial\Omega_s$  übereinstimmen und
- die Spur von  $v_r$  auf  $\partial\Omega_r \cap \Gamma$  verschwindet.

Diese beiden Bedingungen sollen nun unter Einführung eines Lagrange-Multiplikators in die Variationsformulierung einfließen. Sei dazu

$$H(\text{div}, \Omega) := \{q \in (L^2(\Omega))^n \mid \text{div}(q) \in L^2(\Omega)\}$$

die Menge aller  $L^2$ -Vektorfelder auf  $\Omega$  mit Divergenz in  $L^2$ . Sei mit  $\nu_r : \partial\Omega_r \rightarrow \mathbb{R}^n$  die nach außen gerichtete Einheitsnormale von  $\partial\Omega_r$  bezeichnet. Dann existiert, analog zum herkömmlichen Spuroperator, ein *Normalenspuropoperator*  $\text{tr}_{\partial\Omega_r}$ , der von  $H(\text{div}, \Omega)$  in den Dualraum  $H^{-1/2}(\partial\Omega_r)$  des  $H^{1/2}(\partial\Omega_r)$  abbildet und für alle hinreichend glatten  $q \in H(\text{div}, \Omega)$  den Wert  $q \cdot \nu_r$  annimmt. Nun kann man folgenden Raum definieren:

$$M := \left\{ \mu \in \prod_{r=1}^R H^{-1/2}(\partial\Omega_r) \mid \exists q \in H(\text{div}, \Omega) \forall r = 1, \dots, R : \mu_r = q \cdot \nu_r \text{ auf } \partial\Omega_r \right\}$$

Zur Arbeit mit dem  $H^{-1/2}(\partial\Omega_r)$  hätte man eigentlich gerne, ähnlich wie im Riesz'schen Darstellungssatz, für jedes  $\mu_r \in H^{-1/2}(\partial\Omega_r)$  eine Darstellung der Form  $\mu_r(v) = \int_{\partial\Omega_r} \tilde{\mu}_r \cdot \nu_r \, d\gamma$ , wobei  $\tilde{\mu}_r$  aus  $H^{1/2}(\partial\Omega_r)$  sein soll. Dies gilt zwar hier *nicht*, aber umgekehrt induziert natürlich trotzdem jedes  $\tilde{\mu}_r \in H^{1/2}(\partial\Omega_r)$  über diese Darstellung ein lineares Funktional  $\mu_r \in H^{-1/2}(\partial\Omega_r)$ .

Im Folgenden soll daher:

- $\mu_r \in H^{-1/2}(\partial\Omega_r)$  als eine Funktion von  $\partial\Omega_r \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet werden und
- verwendet werden, dass dann alle Funktionen aus  $H^{1/2}(\partial\Omega_r)$  auch in  $H^{-1/2}(\partial\Omega_r)$  zu finden sind.

Sei  $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, \mu) \mapsto -\sum_{r=1}^R \int_{\partial\Omega_r} \mu_r v_r \, d\gamma$  eine Bilinearform.

**Lemma 1.** Ein stetiges lineares Funktional  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$  verschwindet genau dann auf allen  $v \in H_0^1(\Omega)$ , wenn es ein eindeutig bestimmtes Element  $\mu \in M$  gibt, so dass

$$\forall v \in X : L(v) = \sum_{r=1}^R \int_{\partial\Omega_r} \mu_r v_r \, d\gamma \quad (= -b(v, \mu))$$

*Beweis.* Bei [RT77] unter Verwendung des Satzes von Hahn-Banach und der Green'schen Formel.  $\square$

**Korollar.**

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in X \mid \forall \mu \in M : b(v, \mu) = 0\} \quad (2.1)$$

*Beweis.* Sei  $Q := \{v \in X \mid \forall \mu \in M : b(v, \mu) = 0\}$ .

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Betrachte  $b(\cdot, \mu)$  für ein festes  $\mu \in M$ . Nach Lemma 1 verschwinden Funktionale dieser Form auf  $H_0^1(\Omega)$ , also ist  $b(v, \mu) = 0$ . Da dies für alle  $\mu \in M$  gilt, ist also  $v \in Q$ .

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $v \in Q$ . Es ist zu zeigen, dass die Spur von  $v$  auf  $\Gamma$  verschwindet und auf allen inneren Gebietsgrenzen aus beiden Richtungen übereinstimmt.

Sei zunächst  $\Omega_s$  so gewählt, dass  $\partial\Omega_s \cap \Gamma =: K'$  nichttrivial sei. Wenn  $\forall \mu \in M : b(v, \mu) = 0$  gilt, gilt es insbesondere auch für dasjenige  $\mu$ , das auf  $K'$  identisch mit  $v_{s|K'}$  ist und überall sonst 0. Dann ist sicherlich

$$b(v, \mu) = -\sum_{r=1}^R \int_{\partial\Omega_r} \mu_r v_r \, d\gamma = -\int_{K'} (v_s)^2 = 0 \implies v_{s|K'} = 0$$

Seien nun  $\Omega_t$  und  $\Omega_s$  benachbarte Gebiete, so dass  $\Omega_t \cap \Omega_s =: K'$  nichttrivial sei. Betrachte nun ein  $\mu$ , so dass  $\mu_t$  auf  $K'$  identisch mit  $(v_{t|K'} - v_{s|K'})$  ist. Weil natürlich auf  $K'$   $v_t = -v_s$  gilt, muss  $\mu_s = -\mu_t$  auf  $K'$  gelten. Überall sonst soll  $\mu \equiv 0$  sein. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b(v, \mu) &= -\sum_{r=1}^R \int_{\partial\Omega_r} \mu_r v_r \, d\gamma = -\int_{K'} \mu_t v_t - \int_{K'} \mu_s v_s \\ &= \int_{K'} \mu_s v_t - \int_{K'} \mu_s v_s = -\int_{K'} (v_t - v_s)^2 = 0 \implies v_{t|K'} = v_{s|K'} \end{aligned}$$

Beide Spurkriterien sind erfüllt, dies gilt analog für alle inneren bzw. äußeren Gebietsgrenzen und damit ist  $v \in H_0^1(\Omega)$ .  $\square$

Anschaulich bedeutet dies, dass man durch die obige Integralbedingung auf den Gebietsgrenzen die „Sprünge“, die Funktionen aus  $X$  dort noch haben können, verbietet;  $\forall \mu \in H^{1/2}(\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_s) : \int_{\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_s} \mu \cdot (v_t - v_s) = 0$  ist also eine schwache Formulierung von Stetigkeit von  $v_t$  und  $v_s$  an der gemeinsamen Gebietsgrenze.

Unter Verwendung der stetigen Bilinearform

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \sum_{r=1}^R \int_{\Omega_r} \nabla u_r \cdot \nabla v_r \, dx \quad (2.2)$$

kann man nun eine hybride Version der Variationsformulierung aufstellen:

**Problem (VarPH).** Finde  $(u, \lambda) \in X \times M$  mit

$$\forall v \in X : a(u, v) + b(v, \lambda) = l(v) \quad (\text{VarPH.a})$$

$$\forall \mu \in M : b(u, \mu) = 0 \quad (\text{VarPH.b})$$

**Satz 1.** Das Problem (VarPH) hat eine eindeutig bestimmte Lösung  $(u, \lambda) \in X \times M$ , es gilt  $u \in H_0^1(\Omega)$  und  $u$  löst Problem (Var).

*Beweis.* Angenommen,  $(u, \lambda)$  ist eine Lösung von (VarPH), dann gilt (VarPH.b), d. h. nach (2.1) ist  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Weil  $b(\cdot, \lambda)$  auf  $H_0^1(\Omega)$  verschwindet, gilt dann außerdem

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : l(v) = a(u, v) + b(v, \lambda) = a(u, v).$$

Also ist  $u$  auch Lösung von (Var).

Es bleibt zu zeigen, dass (VarPH) eine eindeutig bestimmte Lösung hat. Betrachte dafür das zu (VarPH) gehörende Standardproblem (Var), d. h. mit dem gleichen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $l(\cdot)$ . Dafür existiert bekanntermaßen eine eindeutige Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Betrachte nun das stetige lineare Funktional

$$L : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \int_{\Omega} f v \, dx - a(u, v)$$

$L$  verschwindet auf  $H_0^1(\Omega)$ , nach Lemma 1 gibt es also ein eindeutig bestimmtes  $\lambda \in M$  mit  $\forall v \in X : b(v, \lambda) = L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx - a(u, v)$ . Also erfüllt dieses  $(u, \lambda)$  auch (VarPH.a) und ist damit die eindeutige Lösung von (VarPH).  $\square$

### 3 Formulierung als FEM-Problem

Um das Problem (VarPH) mittels Finiter Elemente zu lösen, muss man endlichdimensionale Unterräume  $X_h \subset X$ ,  $M_h \subset M$  bestimmen. In diesem Abschnitt sollen zwei Probleme, die eine Approximation von (VarPH) darstellen, formuliert und die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung geklärt werden. Sei zunächst, in völliger Analogie zu (VarPH), folgendes Problem definiert:

**Problem (Q<sub>h</sub>).** Finde  $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$  mit

$$\forall v_h \in X_h : a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad (\text{Q}_h.\text{a})$$

$$\forall \mu_h \in M_h : b(u_h, \mu_h) = 0. \quad (\text{Q}_h.\text{b})$$

Man will nun nur noch die Funktionen betrachten, die (Q<sub>h</sub>.b) von vornherein erfüllen und definiert

$$V_h := \{v_h \in X_h \mid \forall \mu_h \in M_h : b(v_h, \mu_h) = 0\}$$

Mit Hinblick auf (2.1), die alternative Definition von  $H_0^1(\Omega)$ , scheint dies eine endlichdimensionale Approximation von  $H_0^1(\Omega)$  zu sein; im Allgemeinen ist  $V_h$  jedoch *keine* Teilmenge von  $H_0^1(\Omega)$ , da die gegebene Bedingung  $\forall \mu_h \in M_h : b(v_h, \mu_h) = 0$  ja maßgeblich von der Größe von  $M_h$  abhängt. Wäre beispielsweise  $M_h = \{0\}$ , so wäre  $V_h = X_h$ , also insbesondere gäbe es überhaupt keine Stetigkeitsbedingungen an den Elementengrenzen. Auf dem eingeschränkten Raum  $V_h$  kann man nun darauf folgendes Problem formulieren:

**Problem (P<sub>h</sub>).** Finde  $u_h \in V_h$  mit

$$\forall v_h \in V_h : a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx$$

Eine Lösung von (Q<sub>h</sub>) liefert immer auch eine Lösung von (P<sub>h</sub>); die Argumentation verläuft analog zum Beweis von Satz 1; die Umkehrung gilt jedoch nicht immer. Näheres liefert folgender

**Satz 2.** Sei

$$\|\cdot\|_h : v_h \mapsto a(v_h, v_h)^{1/2} = \left( \sum_{r=1}^R \int_{\Omega_r} \nabla v_{h,r} \cdot \nabla v_{h,r} \, dx \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

eine Norm auf  $V_h$ .

Dann hat

(a)  $(P_h)$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $u_h \in V_h$

(b)  $(Q_h)$  genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung  $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times M_h$ , wenn die Bedingung

$$\{\mu_h \in M_h \mid \forall v_h \in X_h : b(v_h, \mu_h) = 0\} = \{0\} \quad (3.2)$$

gilt.

*Beweis.* (a) Es sollen die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Lemmas gezeigt werden, d. h. dass  $a(\cdot, \cdot)$   $V_h$ -elliptisch ist.  $V_h$  ist endlichdimensional, d. h. die Norm  $\|\cdot\|_h$  und die von  $X$  geerbte Norm  $\|\cdot\|_X$  sind äquivalent, also folgt sofort  $\exists c > 0 : c \|v_h\|_X^2 \leq \|v_h\|_h^2 = a(v_h, v_h)$ .

$a$  ist bilinear und symmetrisch und wenn  $\|\cdot\|_h$  eine Norm ist, ist  $a$  auch positiv definit, d. h. ein Skalarprodukt und es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:  $|a(v, w)| \leq \|v\|_h \cdot \|w\|_h$  und wegen der Normenäquivalenz ist dies  $\leq C \cdot \|v\|_X \cdot \|w\|_X$  für ein  $C > 0$ . Folglich ist  $a$   $V_h$ -elliptisch und nach Lax-Milgram hat damit  $(P_h)$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $u_h \in V_h$ .

(b) Sei  $u_h$  eine Lösung von  $(P_h)$ .  $u_h$  löst damit zumindest  $(Q_h.b)$ , es bleibt dann noch zu zeigen, dass es ein eindeutig bestimmtes  $\lambda_h \in M_h$  gibt mit

$$\forall v_h \in X_h : b(v_h, \lambda_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx - a(u_h, v_h)$$

Dies kann man als lineares Gleichungssystem  $A\beta = c$  der Größe  $(\dim X_h) \times (\dim M_h)$  auffassen, mit  $a_{ij} = b(x_i, m_j)$  und  $c_i = \int_{\Omega} f x_i \, dx - a(u_h, x_i)$ , wobei die  $x_i$  und  $m_j$  Basiselemente von  $X_h$  bzw.  $M_h$  sein sollen. Nun ist die Menge aus (3.2) isomorph zum Kern von  $A$ , denn für  $\mu_h = \sum_j \beta_j m_j$  gilt  $\forall v_h \in X_h : b(v_h, \mu_h) = 0 \iff A\beta = \vec{0}$ .

$A$  hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn  $\text{rank } A = \dim M_h$ . Nun ist (3.2) äquivalent zu  $\dim \ker A = 0$ , und dies ist wegen  $\dim M_h = \dim \ker A + \text{rank } A = \text{rank } A$  äquivalent zur eindeutigen Lösbarkeit von  $A$  und damit zu Existenz und Eindeutigkeit von  $\lambda_h$ . □

## 4 Bedingungen an FEM-Räume

Im vorherigen Abschnitt wurden FEM-Analogien zum Problem (VarPH) aufgestellt und Bedingungen genannt, unter denen eindeutige Lösungen existieren. Nun sollen diese Anforderungen konkretisiert werden, d. h. es sollen Kriterien genannt werden, so dass  $X_h$  und  $M_h$  die Bedingungen (3.1) und (3.2) erfüllen.

Sei  $\Omega$  eine beschränkte, polyedrische Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $T_h$  eine Triangulierung von  $\Omega$ , so dass  $\forall K \in T_h : \text{diam}(K) \leq h$ .  $\hat{K}$  sei ein festes Referenzelement (z. B. das Dreieck  $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ ), so dass jedes  $K \in T_h$  das Bild einer affin linearen Abbildung  $F_K : \hat{K} \rightarrow K$  ist.<sup>1</sup> Gesucht sind nun Funktionsräume

$$\hat{P} \subset H^1(\hat{K}) \quad \text{und} \quad \hat{S} \subset L^2(\partial\hat{K})$$

auf diesem Referenzelement, die als Grundlage für  $X_h$  und  $M_h$  dienen können.

- Sei  $P_k$  der Raum der Polynome auf  $\mathbb{R}^n$  vom Grad  $\leq k$ .
- Sei  $\hat{S}_k$  der Raum der Funktionen auf  $\partial\hat{K}$ , die auf jeder der  $(n-1)$ -dimensionalen Seiten von  $\hat{K}$  Polynome vom Grad  $\leq k$  sind (aber an allen Seiten kleinerer Dimension, z. B. Eckpunkten eines Dreiecks oder Kanten eines Tetraeders, keinerlei Stetigkeitsbedingungen genügen müssen).
- Sei  $\hat{T}_k$  die Menge der Funktionen in  $\hat{S}_k$ , die stetig sind.

<sup>1</sup>Prinzipiell ist es auch möglich, nichtlineare Abbildungen  $F_K$  zu verwenden, beispielsweise um einen gekrümmten Rand von  $\Omega$  zu approximieren; die entsprechenden Elemente heißen dann *Isoparametrische Elemente*, siehe z. B. [Bra97].

An  $\hat{P}$  seien jetzt folgende Forderungen gestellt:

$$P_k \subset \hat{P} \text{ für ein } k \geq 1 \quad (4.1)$$

$$\hat{T}_k \subset \hat{P}|_{\partial\hat{K}}, \text{ wobei } \hat{P}|_{\partial\hat{K}} := \{v|_{\partial\hat{K}} \mid v \in \hat{P}\} \quad (4.2)$$

Dann sei mit  $P_K := \{v \in H^1(K) \mid v = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \hat{P}\}$  die Menge der auf  $K$  „hochgezogenen“ Funktionen von  $\hat{P}$  bezeichnet und es sei

$$X_h := \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall K \in T_h : v|_K \in P_K\} \quad (4.3)$$

der Ansatzraum der „elementweisen  $\hat{P}$ -Funktionen“, die an den Elementgrenzen keinerlei Stetigkeitsbedingungen erfüllen. Es muss wieder mittels des Spuoperators der Wert auf „beiden Seiten“ einer Dreieckskante ermittelt werden, auf der Kante selbst ist die Funktions nicht festgelegt.

$\hat{S}$  soll folgende Bedingungen erfüllen:

$$\hat{S}_m \subset \hat{S} \text{ für ein } m \geq 0 \quad (4.4)$$

$$\forall \hat{\alpha} \in \hat{S}_0 : \hat{\alpha} \cdot \hat{S} \subset \hat{S} \quad (4.5)$$

$\hat{S}$  besteht also mindestens aus den Funktionen auf dem Referenzelement, die auf jeder  $(n-1)$ -dimensionalen Seite konstant sind und ist außerdem abgeschlossen gegenüber der Multiplikation mit diesen seitenweise konstanten Funktionen. Sei mit  $S_{\partial K} := \{\mu \in L^2(\partial K) \mid \mu = \hat{\mu} \circ F_K^{-1}, \hat{\mu} \in \hat{S}\}$  die Menge der auf  $\partial K$  „hochgezogenen“ Funktionen von  $\hat{S}$  bezeichnet und es sei

$$M_h := \left\{ \mu \in \prod_{K \in T_h} S_{\partial K} \mid \mu_{1|_{K'}} = -\mu_{2|_{K'}} \text{ auf } K' := \partial K_1 \cap \partial K_2, \text{ falls } K_1 \text{ und } K_2 \text{ benachbart in } T_h \right\} \quad (4.6)$$

der Raum der auf den Elementgrenzen definierten  $\hat{S}$ -Funktionen.

Um die obigen Forderungen an  $\hat{P}$  und  $\hat{S}$  zu rechtfertigen, soll nun der Zusammenhang zwischen diesen Forderungen und den Bedingungen für die Lösbarkeit von  $(P_h)$  und  $(Q_h)$  hergestellt werden.

**Lemma 2.** (4.4) ( $\hat{S}_m \subset \hat{S}$  für ein  $m \geq 0$ ) impliziert (3.1) ( $a(\cdot, \cdot)$  induziert eine Norm  $\|\cdot\|_h$  auf  $V_h$ )

*Beweis.* Zu zeigen ist:  $\|v_h\|_h = 0 \implies v_h = 0$ . Dies geschieht bei [RT77] durch Konstruktion eines konkreten, seitenweise konstanten  $\mu_h$ , so dass aus der (durch  $\|v_h\|_h = 0$  implizierten) elementweisen Konstanz von  $v_h$  durch die Forderung  $b(v_h, \mu_h) = 0$  auch  $v_h = 0$  folgt, ähnlich zum Beweis des Korollars aus Lemma 1.  $\square$

Die sehr einfach zu erfüllende Bedingung (4.4) sichert also bereits eine eindeutige Lösung des Problems  $(P_h)$ . Ist man an der Lösung von  $(Q_h)$  interessiert, hilft folgendes

**Lemma 3.**

$$\{\mu_h \in \hat{S} \mid \forall v_h \in \hat{P} : \int_{\partial\hat{K}} \mu_h v_h d\gamma = 0\} = \{0\} \quad (4.7)$$

impliziert (3.2), d. h.  $\{\mu_h \in M_h \mid \forall v_h \in X_h : b(v_h, \mu_h) = 0\} = \{0\}$ .

*Beweis.* Bei [RT77] durch „Hochziehen“ auf  $P_K$  bzw.  $S_{\partial K}$  mittels  $F_K^{-1}$  und entsprechendes Anwenden auf alle  $K \in T_h$ .  $\square$

## 5 Beispiel: Dreieckselemente im $\mathbb{R}^2$

Sei im Folgenden  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und  $\hat{K}$  ein Dreieck mit Eckpunkten  $a_1, a_2, a_3$ . Es soll jetzt ein konkreter Funktionsraum bestimmt werden, in dem  $(Q_h)$  gelöst werden kann. Dafür muss (4.7) erfüllt sein und dies sichert folgendes

**Lemma 4.** Sei  $\hat{K}$  ein Dreieck und  $k \geq 1$  und  $m \geq 0$  zwei ganze Zahlen. Die Bedingungen

$$\mu \in \hat{S}_m \quad \text{und} \quad \forall v \in \hat{T}_k: \int_{\partial \hat{K}} \mu v \, d\gamma = 0 \quad (5.1)$$

implizieren  $\mu = 0$  genau dann, wenn

$$k \geq \begin{cases} m+1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ m+2 & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (5.2)$$

*Beweis.* Die Idee des Beweises ist es, das Integral  $\int_{\partial \hat{K}} \mu v \, d\gamma$  vom Grad  $\leq 2k-1$  auf jeder Kante durch eine Quadraturformel durch Auswertung an den entsprechenden  $k+1$  Gauß-Lobatto-Punkten pro Kante zu berechnen. Es folgen Bedingungen an die Funktionswerte an den  $3k$  Gauß-Lobatto-Punkten auf  $\partial \hat{K}$  und daraus dann der Minimalgrad, den eine Funktion in  $\hat{T}_k$  haben muss. Die ausführliche Version findet sich bei [RT77].  $\square$

Die Aussage des Lemmas ist ziemlich stark, denn man bekommt aus der Wahl der richtigen Polynomgrade über (4.7), (3.2) und Satz 2 direkt die Existenz einer eindeutigen Lösung von  $(Q_h)$ . Im Folgenden sollen die einfachsten Dreieckselemente, die (5.2) erfüllen, untersucht werden.

Sei  $k \geq 1$  ungerade. Wähle  $\hat{P} := P_k$  und  $\hat{S} := \hat{S}_{k-1}$  (also  $m = k-1$ ), dann existiert nach obigen Ausführungen eine eindeutige Lösung  $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$  von  $(Q_h)$ .  $u_h$  ist dann auch Lösung von  $(P_h)$  und damit in  $V_h$ . Es soll nun eine Charakterisierung dieses Raumes  $V_h$  mit Bezug auf  $X_h$  vorgenommen werden.

$v_h \in X_h$  ist genau dann in  $V_h$ , wenn  $\forall \mu_h \in M_h: b(v_h, \mu_h) = 0$ . Dies ist äquivalent zu:

- (a) Für ein benachbartes Paar  $(K_1, K_2)$  von Dreiecken und ihre gemeinsame Kante  $K'$  ist

$$\forall \mu \in S_{\partial K_1}: \int_{K'} \mu_1 v_{h,1} \, d\gamma + \int_{K'} (-\mu_1) v_{h,2} \, d\gamma = 0$$

Da  $S_{\partial K_1}$  nach der Wahl von  $\hat{S}$  auf jeder Dreieckskante ein Polynom  $(k-1)$ -ten Grades ist, ist dies das gleiche, als wenn die Aussage für alle Polynome  $(k-1)$ -ten Grades auf dem  $\mathbb{R}^n$  gelten muss. Daher ist die obige Aussage äquivalent zu:

$$\forall \mu \in P_{k-1}: \int_{K'} \mu (v_{h,1} - v_{h,2}) \, d\gamma = 0$$

- (b) Für ein Dreieck  $K$  mit einer Seite  $K'$  auf dem Rand  $\Gamma$  ist analog

$$\forall \mu \in P_{k-1}: \int_{K'} \mu v_{h|K} \, d\gamma = 0.$$

In beiden Fällen ist der Integrand ein Polynom vom Grad höchstens  $2k-1$  und das Integral kann damit durch Auswertung an den  $k$  Gauß-Legendre-Punkten berechnet werden. Soll ein Polynom  $(2k-1)$ -ten Grades auf einem Intervall das Integral 0 haben, muss es an den  $k$  Gauß-Legendre-Punkten dieses Intervalls den Wert 0 haben. Folglich ist die obige Integralformulierung äquivalent zu:

- (a)  $v_h$  ist stetig auf den jeweils  $k$  Gauß-Legendre-Punkten aller Kanten von  $T_h$  in  $\Omega$   
(b)  $v_h$  verschwindet auf den jeweils  $k$  Gauß-Legendre-Punkten aller Kanten von  $T_h$  auf  $\Gamma$

Die genannten Eigenschaften charakterisieren also die Funktionen in  $V_h$ , es ist aber noch nicht geklärt, ob dies tatsächlich auch alle Freiheitsgrade sind. Für  $k=1$  ist dies sicherlich der Fall, denn die insgesamt drei Gauß-Legendre-Punkte auf den Dreieckskanten reichen aus, um eine lineare Funktion innerhalb eines Dreiecks vollständig festzulegen. Das Dreieckselement dieser Form heißt *Crouzeix-Raviart-Element* oder *nichtkonformes  $P_1$ -Element* und ist exemplarisch in Abb. 1 abgebildet.

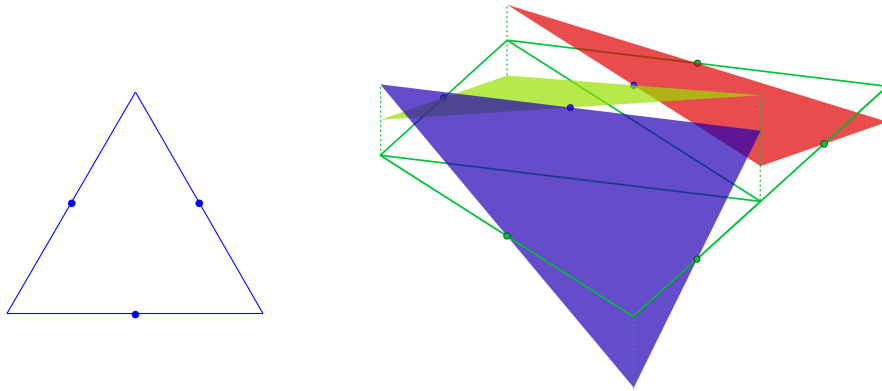


Abbildung 1: Das Crouzeix-Raviart-Element: Freiheitsgrade (links) und Beispiel für Elemente (rechts)

Für größere  $k$  könnte es aber durchaus sein, dass es zwei Funktionen in  $V_h$  gibt, die auf den Gauß-Legendre-Punkten aller Kanten die gleichen Werte haben, im Innern aber voneinander verschieden sind. Dies ist auch der Fall:

**Lemma 5.** Sei  $k$  eine ungerade ganze Zahl. Seien  $a_1, a_2, a_3$  die Eckpunkte von  $\hat{K}$  und  $\{b_i\}_{i=1}^k, \{b_i\}_{i=k+1}^{2k}$  und  $\{b_i\}_{i=2k+1}^{3k}$  die Gauß-Legendre-Punkte auf den Kanten  $[a_1, a_2]$ ,  $[a_2, a_3]$  bzw.  $[a_3, a_1]$ . Dann ist  $\{b_i\}_{i=1}^{3k}$  eine unisolvente Menge für  $\hat{T}_k$ , d. h. für eine Menge von Skalaren  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{3k}$  gibt es genau eine Funktion  $v \in \hat{T}$  mit  $\forall i = 1, \dots, 3k : v(b_i) = \alpha_i$ .

Des Weiteren gilt für  $k \geq 3$ , dass  $\{b_i\}_{i=1}^{N(k)}$  eine unisolvente Menge für  $P_k$  ist, wobei  $N(k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$  und  $\{b_i\}_{i=3k+1}^{N(k)}$  eine beliebige unisolvente Menge für  $P_{k-3}$  sei.

*Beweis.* Bei [RT77]. □

Dieses Lemma führt also zu einer Möglichkeit, für  $k \geq 3$  eine  $P_k$ -unisolvante Menge zu bestimmen. Für  $k = 3$  beispielsweise nimmt man eine beliebige  $P_0$ -unisolvante Menge, d. h. einen Punkt innerhalb des Dreiecks, nimmt die insgesamt 9 Gauß-Legendre-Punkte auf den Dreiecksseiten hinzu und erhält  $N(3) = 10$  Punkte, die nach dem Lemma die Freiheitsgrade von  $P_k$  bestimmen.

## 6 Fehlerabschätzung

Nach den beschriebenen Dreieckselementen soll nun noch eine Abschätzung für den Fehler  $u - u_h$  nach der allgemeinen Theorie von Kapitel 3 und 4 gegeben werden.

**Satz 3.** Sei  $X_h \subset X$ ,  $M_h \subset M$  und  $\|\cdot\|_h = a(\cdot, \cdot)^{1/2}$  eine Norm auf  $V_h$ . Sei  $(u, \lambda) \in X \times M$  die eindeutig bestimmte Lösung von (VarPH). Dann gilt für die Lösung  $u_h \in V_h$  von  $(P_h)$  die folgende Fehlerdarstellung:

$$\|u - u_h\|_h^2 = \left( \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \right)^2 + \left( \inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, \lambda - \mu_h)}{\|v_h\|_h} \right)^2 \quad (6.1)$$

*Beweis.* Sei  $\pi_h$  der Operator, der  $u$   $a$ -orthogonal auf  $V_h$  projiziert, d. h.  $\forall v_h \in V_h : a(u - \pi_h u, v_h) = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_h^2 &= a(u - u_h, u - u_h) = a(u - \pi_h u + \pi_h u - u_h, u - \pi_h u + \pi_h u - u_h) \\ &= a(u - \pi_h u, u - \pi_h u) + 2a(u - \pi_h u, \pi_h u - u_h) + a(\pi_h u - u_h, \pi_h u - u_h) \\ &= \|u - \pi_h u\|_h^2 + \|\pi_h u - u_h\|_h^2 \end{aligned}$$

$\pi_h u$  ist die  $a$ -Orthogonalprojektion von  $u$ , minimiert also unter allen Elementen aus  $V_h$  den Abstand zu  $u$  bezüglich der von  $a$  induzierten Norm:

$$\|u - \pi_h u\|_h = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h$$



Dies ergibt den ersten Teil von (6.1). Betrachte nun das lineare Funktional  $L$  über  $V_h$ , gegeben durch  $L(v) = a(\pi_h u - u_h, v)$ . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es genau ein  $y \in V_h$ , so dass  $L(v) = a(y, v)$  (natürlich  $\pi_h u - u_h$  selbst) und es ist  $\|L\|_{V_h'} = \|y\|_h$ . Daraus folgt:

$$\|\pi_h u - u_h\|_h = \|L\|_{V_h'} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{|L(v_h)|}{\|v_h\|_h} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(\pi_h u - u_h, v_h)}{\|v_h\|_h} = \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u - u_h, v_h)}{\|v_h\|_h}$$

Nach (VarPH.b) und den Definitionen von  $V_h$  bzw. einer Lösung von  $(P_h)$  erhält man

$$\forall v_h \in V_h \forall \mu_h \in M_h : a(u - u_h, v_h) = -b(v_h, \lambda - \mu_h)$$

Wegen der Linearität von  $b$  ist  $\sup_{v_h} -b(v_h, \lambda - \mu_h) = \sup_{v_h} b(v_h, \lambda - \mu_h)$  und man erhält

$$\forall \mu_h \in M_h : \|\pi_h u - u_h\|_h = \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, \lambda - \mu_h)}{\|v_h\|_h}$$

Da dies für alle  $\mu_h$  gilt, kann man noch  $\inf_{\mu_h \in M_h}$  davor schreiben und erhält die Behauptung.  $\square$

Im Folgenden soll nun immer eine reguläre Familie  $\mathcal{T} := \{T_h\}$  von Triangulierungen von  $\Omega$  betrachtet werden, d. h. es gibt ein von  $h$  unabhängiges  $\sigma > 0$ , so dass

$$\forall T_h \in \mathcal{T} : \max_{K \in T_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

Dabei sei  $h_K := \text{diam}(K)$  und  $\rho_K$  der Radius der größten  $K$  einbeschreibbaren Kugel (z. B. Inkreisradius für  $n = 2$ ).

Für ein  $\varphi \in H^2(\Omega)$  sei  $\psi \in M$  definiert durch  $\psi_K = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_K}$ , d. h. die Normalenableitung von  $\varphi$  auf jedem Dreieck  $K$ . Im Hinblick auf die geplante Fehlerabschätzung soll dabei  $\varphi$  für eine exakte Lösung  $u$  stehen und  $\psi$  für den entsprechenden Lagrange-Multiplikator; dies ist zwar nicht immer so gegeben, trotzdem soll zunächst eine Abschätzung für  $\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \psi - \mu_h)}{\|v\|_h}$  gefunden werden.

**Lemma 6.** *Sei  $\mathcal{T}$  eine reguläre Familie von Triangulierungen und zu jeder solchen Triangulierung  $T_h$  sei ein Raum  $M_h$  gegeben, der wie in (4.6) definiert sei. Sei  $\hat{S}_m \subset \hat{S}$  für ein  $m \geq 0$  und  $\varphi \in H^{l+1}(\Omega)$  mit  $1 \leq l \leq m + 1$ . Dann gibt es eine von  $h$  unabhängige Konstante  $T > 0$ , so dass*

$$\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \psi - \mu_h)}{\|v\|_h} \leq T \cdot h^l \cdot |\varphi|_{l+1, \Omega} \quad (6.2)$$

*Beweis.* Bei [RT77].  $\square$

Nun kann man die beiden letzten Resultate kombinieren und erhält:

**Satz 4.** *Sei  $\mathcal{T} = \{T_h\}$  eine reguläre Familie von Triangulierungen mit jeweils zugeordneten Räumen  $X_h$  und  $M_h$  nach (4.3) bzw. (4.6). Sei  $\hat{S}_m \subset \hat{S}$  für ein  $m \geq 0$  und  $P_k \subset \hat{P}$  und  $\hat{T}_k \subset \hat{P}_{|\partial \hat{K}}$  für ein  $k \geq 1$ . Die Lösung  $u$  von (Var) sei in  $H^{l+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  mit  $l + 1 - \frac{n}{2} > 0$  und  $1 \leq l \leq \min(k, m + 1)$ . Dann gibt es eine von  $h$  unabhängige Konstante  $T > 0$ , so dass*

$$\|u - u_h\|_h \leq T \cdot h^l \cdot |u|_{l+1, \Omega} \quad (6.3)$$

*Beweis.* In [RT77] wird zunächst eine bekannte Fehlerabschätzung für den Unterraum  $W_h \subset V_h$  der stetigen, elementweise polynomiellen Funktionen, die auf  $\Gamma$  verschwinden, zitiert. Unter den genannten Voraussetzungen gilt mit  $|v|_{p, \Omega} := \sum_{|\alpha|=p} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 dx$ :

$$\inf_{w_h \in W_h} |u - w_h|_{1, \Omega} \leq c_1 \cdot h^l \cdot |u|_{l+1, \Omega} \quad (6.4)$$

für eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c_1$ . Weil  $W_h \subset V_h$  kann die Bestapproximation bezüglich  $\|\cdot\|_h$  in  $V_h$  an  $u$  nicht schlechter sein als die in  $W_h$  (man kann diese wegen  $W_h \subset H_0^1(\Omega)$  berechnen) und wegen

$$\forall w_h \in W_h : \|w_h\|_h^2 = a(w_h, w_h) = \sum_r \int_{\Omega_r} \nabla w_h \cdot \nabla w_h = \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha w_h|^2 = |w_h|_{1, \Omega}$$

gilt

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \leq \inf_{w_h \in W_h} |w_h|_{1,\Omega} \leq c_1 \cdot h^l \cdot |u|_{l+1,\Omega}$$

Wendet man nun Lemma 6 auf  $\varphi = u$  und  $\psi = \lambda$  an, erhält man

$$\inf_{\mu_h \in M_h} \sup_{v \in V_h} \frac{b(v_h, \lambda - \mu_h)}{\|v_h\|_h} \leq c_2 \cdot h^l \cdot |u|_{l+1,\Omega} \quad (6.5)$$

Die Behauptung folgt dann durch Einsetzen von (6.4) und (6.5) in die Aussage von Satz 3.  $\square$

Nun kann man unter Verwendung der verallgemeinerten Poincaré-Friedrich'schen Ungleichung, nach der  $\forall v_h \in V_h : \|v_h\|_0 \leq c \|v_h\|_h$  gilt, mit einer anderen Konstante  $T'$  wie folgt abschätzen:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq T' \cdot h^l \cdot |u|_{l+1,\Omega}$$

Für konvexe Gebiete erhält man nach [RT77] mittels der Aubin-Nitsche-Dualitätstechnik sogar

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq T' \cdot h^{l+1} \cdot |u|_{l+1,\Omega}.$$

Dies ist zwar von der Ordnung her nicht besser als die Resultate für konforme Elemente, jedoch wird man auf einem festen Gitter unter Verwendung von nichtkonformen Elementen immer bessere Ergebnisse erhalten als mit den entsprechenden konformen Elementen vom gleichen Grad. Dies ist aber auch nicht verwunderlich, da die nichtkonformen die konformen Elementfunktionen als Teilmenge enthalten und in der Regel mehr Freiheitsgrade aufweisen. Für eine echte Vergleichbarkeit müsste man daher nicht nur die Ordnung in Abhängigkeit von  $h$  berechnen, sondern auch in Abhängigkeit der Freiheitsgrade, die die Größe des zu lösenden linearen Gleichungssystems bestimmen.

## Literatur

- [BF91] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1991.
- [Bra97] Dietrich Braess. *Finite Elemente, Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 3rd edition, 1997.
- [RT77] P. A. Raviart and J. M. Thomas. Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations. *Mathematics of Computation*, 31(138):391–413, April 1977.