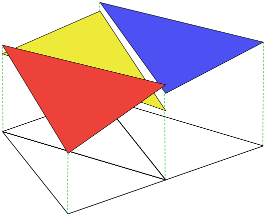


Unstetige Galerkin-Verfahren und die lineare Transportgleichung

Tobias G. Pfeiffer
Freie Universität Berlin

Seminar DG-Verfahren, 26. Mai 2009

Voraussetzungen & Ziele

Voraussetzungen

- Kenntnisse in Numerik partieller Differentialgleichungen
- insbesondere Finite-Elemente-Methode

Ziel des Vortrags

- Zuhörer kennt die Grundlagen, um das DG-Verfahren für die lineare Transportgleichung auf regulären 2D-Triangulierungen implementieren

Überblick

Die lineare Transportgleichung

Entwicklung einer schwachen Formulierung

- Elementweise Ansatzräume
- Numerische Flüsse
- Stabilität

Lösen der schwachen Formulierung

- Formulierung als lineares Gleichungssystem
- Zeitintegration

Implementierung des DG-Verfahrens

- Wahl des Ansatzraumes
- Integration
- Optimierung der Flussberechnung
- Parallelisierung

Überblick

Die lineare Transportgleichung

Entwicklung einer schwachen Formulierung
- Elementweise Ansatzräume
- Numerische Flüsse
- Stabilität

Lösen der schwachen Formulierung
- Formulierung als lineares Gleichungssystem
- Zeitintegration

Implementierung des DG-Verfahrens
- Wahl des Ansatzraumes
- Integration
- Optimierung der Flussberechnung
- Parallelisierung

Die lineare Transportgleichung

Problem

- Rechengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- Gesucht $u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} u_t + \nabla \cdot (\vec{a} u) &= 0 \qquad \text{auf } [0, T] \times \Omega \\ u(0, x) &= u_0(x) \qquad \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

- $\vec{a}$ kann auch von (t, x) abhängig sein

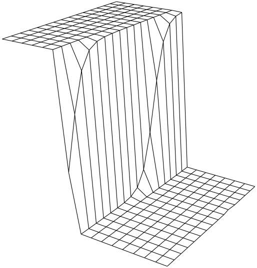
- Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung

$$u_t + \nabla \cdot f(t, x, u, \nabla u) = g(t, x, u)$$

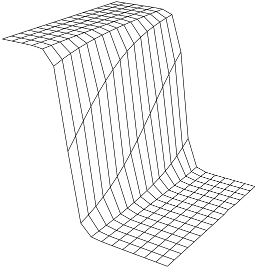
- Auftreten: Physik

Ziel der Berechnung

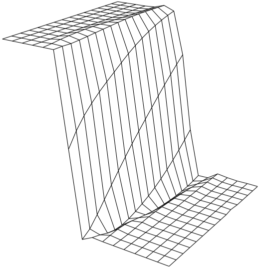
Ziel: Bestimmung von u im Laufe der Zeit



$t = 0$
(Startwert)



$t = t_1$



$t = t_2$

(Bilder aus *Biswas, Devine, Flaherty: Parallel, Adaptive Finite Element Methods for Conservation Laws*)

So what?

- Umstellen und ausrechnen:

$$u_t + \nabla \cdot (\vec{a} u) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_t = -\nabla \cdot (\vec{a} u)$$

- Integrieren:

$$u(t_1, x) = u(t_0, x) + \int_{t_0}^{t_1} u_t(t, x) \, \mathrm{d}t$$

So what?

- Umstellen und ausrechnen:

$$u_t + \nabla \cdot (\vec{a} u) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_t = -\nabla \cdot (\vec{a} u)$$

Wie? $u_t \in$?

- Integrieren:

$$u(t_1, x) = u(t_0, x) + \int_{t_0}^{t_1} u_t(t, x)\, \mathrm{d}t$$

Wie?

Überblick

Die lineare Transportgleichung

Entwicklung einer schwachen Formulierung
- Elementweise Ansatzräume
- Numerische Flüsse
- Stabilität

Lösen der schwachen Formulierung
- Formulierung als lineares Gleichungssystem
- Zeitintegration

Implementierung des DG-Verfahrens
- Wahl des Ansatzraumes
- Integration
- Optimierung der Flussberechnung
- Parallelisierung

Projektion auf Elemente

- Schwache Formulierung:

$$u_t + \nabla \cdot (\vec{a} u) = 0$$

$$\stackrel{\cdot v}{\Longrightarrow} \quad \int_\Omega (u_h)_t v + \int_\Omega \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \qquad \forall\, v \in V \subset L^2(\Omega)$$

Projektion auf Elemente

- Schwache Formulierung:

$$u_t + \nabla \cdot (\vec{a} u) = 0$$

$$\overset{\cdot v}{\Longrightarrow} \quad \int_\Omega (u_h)_t v + \int_\Omega \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \qquad \forall\, v \in V \subset L^2(\Omega)$$

- Partitionierung:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^d \rightsquigarrow \Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\Omega_i}$$

- DG-Verfahren: Ansatzfunktionen haben Träger Ω_i

$$\Rightarrow V \approx V(\Omega_1) \times V(\Omega_2) \ldots \times V(\Omega_N)$$

$$\forall\, i = 1, \ldots, N : \int_{\Omega_i} (u_h)_t v + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \quad \forall\, v \in V(\Omega_i)$$

Elementweise Behandlung

Lemma

Mit $\{v_{|\bigcup_i \Omega_i} \mid v \in V\} \cong V(\Omega_1) \times \ldots \times V(\Omega_N)$ *und* $\forall\, i : P^0 \subset V(\Omega_i)$*:*

$$\int_\Omega (u_h)_t v + \int_\Omega \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \quad \forall\, v \in V \iff$$

$$\forall\, i = 1, \ldots, N : \int_{\Omega_i} (u_h)_t v + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \quad \forall\, v \in V(\Omega_i)$$

Beweis.

Elementweise Behandlung

Lemma

Mit $\{v_{|\bigcup_i \Omega_i} \mid v \in V\} \cong V(\Omega_1) \times \ldots \times V(\Omega_N)$ *und* $\forall i : P^0 \subset V(\Omega_i)$:

$$\int_\Omega (u_h)_t v + \int_\Omega \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \quad \forall v \in V \quad \Longleftrightarrow$$

$$\forall i = 1, \ldots, N : \int_{\Omega_i} (u_h)_t v + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \quad \forall v \in V(\Omega_i)$$

Beweis.

$\Leftarrow$ $\checkmark$

Elementweise Behandlung

Lemma

Mit $\{v_{|\bigcup_i \Omega_i} \mid v \in V\} \cong V(\Omega_1) \times \ldots \times V(\Omega_N)$ *und* $\forall i : P^0 \subset V(\Omega_i)$*:*

$$\int_\Omega (u_h)_t v + \int_\Omega \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \quad \forall v \in V \quad \Longleftrightarrow$$
$$\forall i = 1, \ldots, N : \int_{\Omega_i} (u_h)_t v + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0 \quad \forall v \in V(\Omega_i)$$

Beweis.

$\Leftarrow$ ✓

$\Rightarrow$ $\int_{\Omega_i} (u_h)_t v + \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v \neq 0 \quad \rightsquigarrow v(x) := 1$ auf Ω_i, 0 sonst

$\Rightarrow \int_\Omega (u_h)_t v + \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v \neq 0$ ✓ □

Einbeziehung der Nachbarelemente

- Problem:

$$\int_{\Omega_i} (u_h)_t v + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0$$

  völlig unabhängig von anderen Elementen – Physik??

Einbeziehung der Nachbarelemente

- Problem:

$$\int_{\Omega_i} (u_h)_t v + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0$$

  völlig unabhängig von anderen Elementen – Physik??
- Partielle Integration:

$$\int_{\Omega_i} (u_h)_t v - \int_{\Omega_i} (\vec{a} u_h) \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} v = 0$$

- „Numerischer Fluss“ $\widehat{\vec{a} u_h}$ steuert Zu-/Abfluss
  $\Rightarrow$ selbst zu definieren (aber konsistent)

Einbeziehung der Nachbarelemente

- Problem:

$$\int_{\Omega_i} (u_h)_t v + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{a} u_h) v = 0$$

  völlig unabhängig von anderen Elementen – Physik??
- Partielle Integration:

$$\int_{\Omega_i} (u_h)_t v - \int_{\Omega_i} (\vec{a} u_h) \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} v = 0$$

- „Numerischer Fluss“ $\widehat{\vec{a} u_h}$ steuert Zu-/Abfluss
  $\Rightarrow$ selbst zu definieren (aber konsistent)
- $v \equiv 1 \rightsquigarrow$ Erhaltungseigenschaft

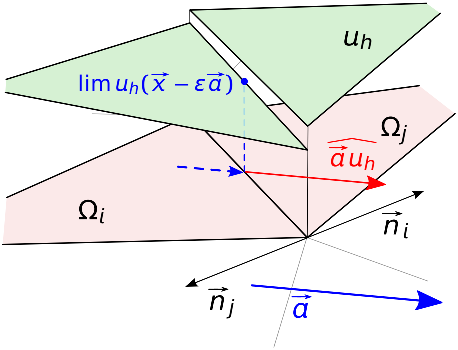
$$\int_{\Omega_i} (u_h)_t + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} = 0$$

Upwind-Fluss

- Upwind-Fluss:

$$\widehat{\vec{a}u_h}(x) = \vec{a} \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_h(\vec{x} - \varepsilon\vec{a})$$

- Transport entlang $\vec{a}$

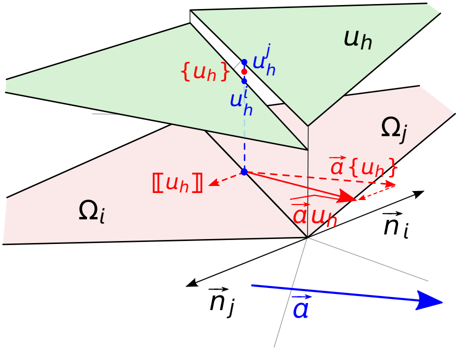


Lax-Friedrichs-Fluss

- Durchschnitt: $\{u_h\} := \frac{1}{2}(u_h^i + u_h^j)$
- Sprung: $[\![u_h]\!] := u_h^i \vec{n}_i + u_h^j \vec{n}_j$
- Lax-Friedrichs-Fluss:

$$\widehat{\vec{a}\,u_h} = \vec{a}\{u_h\} + \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|[\![u_h]\!]$$

- Gewichtung beider Seiten und „Rückfluss“



Stabilität

- Problem ist stabil, falls $-\nabla \cdot \vec{a} \leq L$
- Verfahren ist stabil, falls

$$\Theta_h := \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{a} u_h) + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} u_h \right) \geq 0$$

- hinreichend dafür:

$$\widehat{\vec{a} u_h} = \vec{a} \{u_h\} + C [\![u_h]\!]$$

und C nicht-negativ definite Matrix (z. B. Skalar)

Stabilität von Upwind- und Lax-Friedrichs-Fluss

- Lax-Friedrichs-Fluss: $C = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \right|$
- Upwind-Fluss: $C = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \cdot \vec{n} \right|$

- Lax-Friedrichs-Fluss: $C = \frac{1}{2}\left|\vec{\alpha}\right|$
- Upwind-Fluss: $C = \frac{1}{2}\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{n}\right|$

$$\vec{\alpha}\{u_h\} + \frac{1}{2}\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{n}\right| [\![u_h]\!] \stackrel{??}{=} \vec{\alpha}\lim_{\varepsilon\searrow 0} u_h(\vec{x}-\varepsilon\vec{\alpha})$$

Stabilität von Upwind- und Lax-Friedrichs-Fluss

- Lax-Friedrichs-Fluss: $C = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|$
- Upwind-Fluss: $C = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\cdot\vec{n}\right|$

$$\vec{a}\{u_h\} + \frac{1}{2}\left|\vec{a}\cdot\vec{n}\right|[\![u_h]\!] = \vec{a}\lim_{\varepsilon\searrow 0} u_h(\vec{x}-\varepsilon\vec{a})$$

- eigentlich interessant: $\widehat{\vec{a}u_h}\cdot\vec{n}$
- bei einigen Autoren ist Fluss skalare Größe:

$$\vec{F}(u)\cdot\vec{n} \quad \rightsquigarrow \quad F_{\vec{n}}(u^-,u^+)$$

Überblick

Die lineare Transportgleichung

Entwicklung einer schwachen Formulierung
- Elementweise Ansatzräume
- Numerische Flüsse
- Stabilität

Lösen der schwachen Formulierung
- Formulierung als lineares Gleichungssystem
- Zeitintegration

Implementierung des DG-Verfahrens
- Wahl des Ansatzraumes
- Integration
- Optimierung der Flussberechnung
- Parallelisierung

Wahl einer Basis

- bisher:

$$u_t \in V(\Omega_i) : \int_{\Omega_i} (u_h)_t v - \int_{\Omega_i} (\vec{a} u_h) \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} v = 0 \quad \forall v \in V(\Omega_i)$$

- wähle Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_i}\}$ von $V(\Omega_i)$ ($\dim V(\Omega_i) = k_i$)

Wahl einer Basis

- bisher:

$$u_t \in V(\Omega_i): \int_{\Omega_i} (u_h)_t v - \int_{\Omega_i} (\vec{a} u_h) \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} v = 0 \quad \forall v \in V(\Omega_i)$$

- wähle Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_i}\}$ von $V(\Omega_i)$ ($\dim V(\Omega_i) = k_i$)
- jetzt:

$$\vec{u_t} \in \mathbb{R}^{k_i}: \quad \int_{\Omega_i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} u_t^j \varphi_j \right) \varphi_l - \int_{\Omega_i} (\vec{a} u_h) \cdot \nabla \varphi_l$$

$$+ \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} \varphi_l = 0 \quad \forall l = 1, \ldots k_i$$

Wahl einer Basis

- bisher:

$$u_t \in V(\Omega_i) : \int_{\Omega_i} (u_h)_t v - \int_{\Omega_i} (\vec{a} u_h) \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} v = 0 \quad \forall v \in V(\Omega_i)$$

- wähle Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_i}\}$ von $V(\Omega_i)$ ($\dim V(\Omega_i) = k_i$)
- jetzt:

$$\vec{u_t} \in \mathbb{R}^{k_i} : \quad \int_{\Omega_i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} u_t^j \varphi_j \right) \varphi_l - \int_{\Omega_i} (\vec{a} u_h) \cdot \nabla \varphi_l$$
$$+ \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} \varphi_l = 0 \quad \forall l = 1, \dots k_i$$

- auch u_h ersetzen:

$$\sum_{j=1}^{k_i} u_t^j \int_{\Omega_i} \varphi_j \varphi_l - \sum_{j=1}^{k_i} u^j \int_{\Omega_i} \left(\vec{a} \varphi_j \right) \cdot \nabla \varphi_l + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} \varphi_l = 0$$

Umschreiben in Matrixform

- Gleichung in Matrixform:

$$M^i \overrightarrow{u_t} + K^i \vec{u} + F^i = 0$$

mit

$$M^i_{lj} = \int_{\Omega_i} \varphi_j \varphi_l \text{ (Massenmatrix)}$$

$$K^i_{lj} = -\int_{\Omega_i} (\vec{a} \cdot \nabla \varphi_l)\, \varphi_j \text{ (Steifigkeitsmatrix)}$$

$$F^i_l = \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} \varphi_l$$

Umschreiben in Matrixform

- Gleichung in Matrixform:

$$M^i \overrightarrow{u_t} + K^i \vec{u} + F^i = 0$$

mit

$$M^i_{lj} = \int_{\Omega_i} \varphi_j \varphi_l \text{ (Massenmatrix)}$$

$$K^i_{lj} = -\int_{\Omega_i} \left(\vec{a} \cdot \nabla \varphi_l\right) \varphi_j \text{ (Steifigkeitsmatrix)}$$

$$F^i_l = \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} \varphi_l$$

- Auflösen nach $\overrightarrow{u_t}$:

$$\overrightarrow{u_t} = \left(M^i\right)^{-1} \cdot \left(-K^i \vec{u} - F^i\right) =: H(\vec{u}, t)$$

Zeitintegration

- $u_t(t,x)_{t=t_0}$ bekannt, jetzt $u(t_1,x)$ bestimmen:

$$u_h(t_1,x) = u_h(t_0,x) + \int_{t_0}^{t_1} (u_h)_t(t,x)\,\mathrm{d}t$$

- einfache ODE in t
- Standard-Verfahren: Euler, Runge-Kutta

Verfahren zur Zeitintegration

- $H(\vec{u}, t) = \left(M^i\right)^{-1} \left(-K^i(t)\,\vec{u} - F^i(t, \vec{u})\right)$ wie oben
- Explizites Euler-Verfahren:

$$\overrightarrow{u_{|t_1}} = \overrightarrow{u_{|t_0}} + \Delta t \cdot \overrightarrow{(u_h)_{|t_0}} = \overrightarrow{u_{|t_0}} + \Delta t \cdot H(\overrightarrow{u_{|t_0}}, t_0)$$

- Runge-Kutta-Verfahren, Ordnung 2:

$$\overrightarrow{f_1} = \Delta t \cdot H(\overrightarrow{u_{|t_0}}, t_0) \qquad \overrightarrow{f_2} = \Delta t \cdot H(\overrightarrow{u_{|t_0}} + f_1, t_0 + \Delta t)$$

$$\overrightarrow{u_{|t_1}} = \overrightarrow{u_{|t_0}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2})$$

- auch implizite oder DG-Verfahren für ODE möglich

Überblick

Die lineare Transportgleichung

Entwicklung einer schwachen Formulierung
- Elementweise Ansatzräume
- Numerische Flüsse
- Stabilität

Lösen der schwachen Formulierung
- Formulierung als lineares Gleichungssystem
- Zeitintegration

Implementierung des DG-Verfahrens
- Wahl des Ansatzraumes
- Integration
- Optimierung der Flussberechnung
- Parallelisierung

Annahmen über Gebiet und Ansatzraum

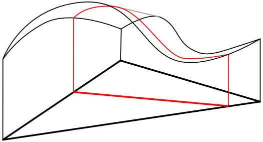
- Bisherige Annahmen:
  - alle Ω_i haben Lipschitzrand (für partielle Integration)
  - $\forall\, v \in V(\Omega_i) : \operatorname{supp}(v) \subset \overline{\Omega_i}$
  - konstante Funktionen in $V(\Omega_i)$

Annahmen über Gebiet und Ansatzraum

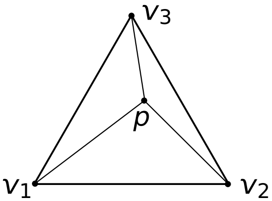
- Bisherige Annahmen:
  - alle Ω_i haben Lipschitzrand (für partielle Integration)
  - $\forall\, v \in V(\Omega_i) : \operatorname{supp}(v) \subset \overline{\Omega_i}$
  - konstante Funktionen in $V(\Omega_i)$
- Gebiet ab jetzt:
  - $d = 2$: „Normalen“, „Randintegral“, Vorteile DG-Methode, ...
  - nur konforme Triangulierungen

Polynomielle Ansatzräume

- Beschränkung auf Polynomräume
- P^m: entlang von Geraden Polynom mit Grad $\leq m$



- Standarddarstellung x-y-Koordinaten: $4x^2y^3 - 2xy^4 + \ldots$
- Alternative: normalisierte Koordinaten, $p = \sum_i \alpha_i v_i$, $\sum_i \alpha_i = 1$



- Polynomdarstellung: $3\alpha_1^3\alpha_2 + 4\alpha_2^2\alpha_3^2 + \ldots$

Konstante Funktionen

- einfachster Fall: $m = 1 \Rightarrow k_i = 1 \Rightarrow \varphi_1 \equiv 1$

$$\sum_{j=1}^{k_i} u_t^j \int_{\Omega_i} \varphi_j \varphi_l - \sum_{j=1}^{k_i} u^j \int_{\Omega_i} \left(\vec{a}\varphi_j\right) \cdot \nabla \varphi_l + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} \varphi_l = 0$$

$$\Longrightarrow u_t \cdot \text{area}(\Omega_i) + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Longrightarrow u_t = -\frac{1}{\text{area}(\Omega_i)} \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n}$$

Konstante Funktionen

- einfachster Fall: $m = 1 \Rightarrow k_i = 1 \Rightarrow \varphi_1 \equiv 1$

$$\sum_{j=1}^{k_i} u_t^j \int_{\Omega_i} \varphi_j \varphi_l - \sum_{j=1}^{k_i} u^j \int_{\Omega_i} \left(\vec{a}\varphi_j\right) \cdot \nabla\varphi_l + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a}u_h} \cdot \vec{n}\varphi_l = 0$$

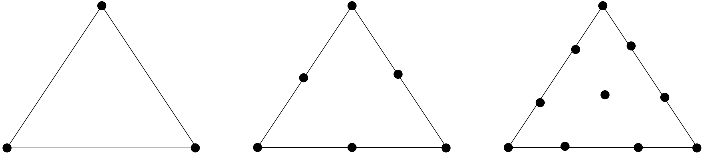
$$\Longrightarrow u_t \cdot \mathrm{area}(\Omega_i) + \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a}u_h} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Longrightarrow u_t = -\frac{1}{\mathrm{area}(\Omega_i)} \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a}u_h} \cdot \vec{n}$$

- das ist ein Finite-Volumen-Verfahren!
- u^1 Durchschnittswert auf Ω_i

Knotenbasis

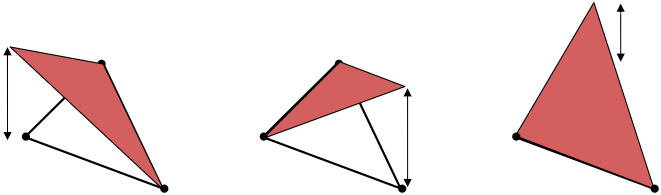
- für höhere Grade attraktiv: Knotenbasis $\{\varphi_j\}$ für Punkte $\{p_l\}$ mit $\varphi_j(p_l) = \delta_{jl}$
- Knotenpunkte



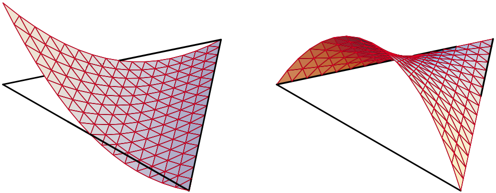
garantieren eindeutige Lösung

Knotenbasis II

- $m = 1$:



- $m = 2$:



(Bilder aus Vorlesungsskript *Introduction to FEM*, University of Colorado at Boulder)

- Form klar, aber auswertbare Darstellung? In $\vec{x}$ oder $\vec{\alpha}$?

Rekursive Darstellung in normalisierten Koordinaten

- Lagrange-Polynome für $[0, 1]$ mit $m + 1$ äquidistanten Stützstellen:

$$\psi_l^n(\alpha) = \prod_{i=0, i \neq l}^{n} \frac{\alpha - \beta_i}{\beta_l - \beta_i} \qquad \beta_i = \frac{i}{m}$$

Rekursive Darstellung in normalisierten Koordinaten

- Lagrange-Polynome für $[0,1]$ mit $m+1$ äquidistanten Stützstellen:

$$\psi_l^n(\alpha) = \prod_{i=0, i\neq l}^{n} \frac{\alpha - \beta_i}{\beta_l - \beta_i} \qquad \beta_i = \frac{i}{m}$$

- Rekursion für $\tau = (I, J, K)$ mit $I + J + K = m$:

$$\varphi_\tau(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \psi_I^I(\alpha_1)\psi_J^J(\alpha_2)\psi_K^K(\alpha_3)$$

- Beispiel: quadratische Knotenbasisfunktion für $p = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$

$$\begin{aligned}\varphi_{(1,1,0)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \psi_1^1(\alpha_1) \cdot \psi_1^1(\alpha_2) \\ &= \frac{\alpha_1 - \beta_0}{\beta_1 - \beta_0} \cdot \frac{\alpha_2 - \beta_0}{\beta_1 - \beta_0} = \frac{\alpha_1 - 0}{\frac{1}{2} - 0} \cdot \frac{\alpha_2 - 0}{\frac{1}{2} - 0} = 4\alpha_1\alpha_2\end{aligned}$$

Beweis rekursive Darstellung

$$\varphi_{(a,b,c)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \underbrace{\psi_I^I(\alpha_1)} \cdot \underbrace{\psi_J^J(\alpha_2)} \cdot \underbrace{\psi_K^K(\alpha_3)}$$

- soll bei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{m}(a, b, c)$ Wert 1 haben
- bei allen anderen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{m}(a', b', c')$ Wert 0 $(a' + b' + c' = m)$

Beweis rekursive Darstellung

$$\varphi_{(a,b,c)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \underbrace{\psi_I^I(\alpha_1)}_{=1\Leftrightarrow\alpha_1=\frac{a}{m}} \cdot \underbrace{\psi_J^J(\alpha_2)}_{=1\Leftrightarrow\alpha_2=\frac{b}{m}} \cdot \underbrace{\psi_K^K(\alpha_3)}_{=1\Leftrightarrow\alpha_3=\frac{c}{m}}$$

- soll bei $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{1}{m}(a,b,c)$ Wert 1 haben
- bei allen anderen $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{1}{m}(a',b',c')$ Wert 0 $(a'+b'+c'=m)$
- Lagrange-Polynome!

Orthogonalbasis

- Wunsch für Geschwindigkeit und Stabilität:

$$M^i \text{ diagonal} \iff \int_{\Omega_i} \varphi_j \varphi_l = \lambda_j \cdot \delta_{jl}$$

- Wahl einer Orthogonalbasis
  (linear: einfach, höhere Grade: nicht so einfach)

Integralberechnung notwendig

$$M_{lj}^{i} = \int_{\Omega_i} \varphi_j \varphi_l \qquad K_{lj}^{i} = -\int_{\Omega_i} \left(\vec{a} \cdot \nabla \varphi_l\right) \varphi_j \qquad F_l^{i} = \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a}\, u_h} \cdot \vec{n}\, \varphi_l$$

- für M^i evtl. hilfreich:

$$\int_{\Omega_i} \alpha_1^a \alpha_2^b \alpha_3^c = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\, \mathrm{area}(\Omega_i)$$

- allgemein: Quadraturformeln notwendig/praktischer

Quadraturformeln

- 1D (Randintegral):

$$\int_{-1}^{1} f(s)\,\mathrm{d}s \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i)$$

- 2D:

$$\int_T f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\sum_{j=1}^{3} \tau_{ij} \vec{v}_j\right)$$

Einschub: Konvergenzaussage

Theorem

Über allgemeine Transportgleichung: $u_t + \nabla \cdot f(u) = 0$

- $f(u) \in W^{m+2,\infty}(\Omega)$ *($m+2$ beschränkte, schwache Ableitungen)*
- *Quadraturformel auf Kanten exakt für* P^{2m+1}
- *Quadraturformel auf Dreiecken exakt für* P^{2m}
- $\{\mathcal{T}\}_h$ *Familie von regulären Triangulierungen, d. h.* $\frac{h_i}{\varrho_i} \leq \sigma$
- $P^m(\Omega_i) \subset V(\Omega_i) \quad \forall\, \Omega_i \in \mathcal{T}$
- $L_h(\vec{u}) \in V$ *die aus* $\left(M^i\right)^{-1} \cdot \left(-K^i \vec{u} - F^i\right)$ *resultierende Approximation von* $-\nabla \cdot f(u)$ *auf ganz* Ω

Dann:

$$\|L_h(\vec{u}) + \nabla \cdot f(u)\|_{L^\infty} \leq C h^{m+1} \, |f(u)|_{W^{m+2,\infty}}$$

Problem der Lokalität

- rein lokale Formulierung

$$M^i \overrightarrow{u_t} + K^i \vec{u} + F^i = 0$$

  sehr gut
- Problem:

$$F_l^i = \int_{\partial\Omega_i} \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} \varphi_l = \sum_{e \in \partial\Omega_i} \int_e \widehat{\vec{a} u_h} \cdot \vec{n} \varphi_l$$

  - dauert lang
  - involviert Nachbarn

Globale Matrix assemblieren?

$$M\vec{u_t} + K\vec{u} + F = \begin{pmatrix} M^0 & & & \\ & M^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M^N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u_t^0} \\ \vec{u_t^1} \\ \vdots \\ \vec{u_t^N} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} K^0 & & & \\ & K^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K^N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u^0} \\ \vec{u^1} \\ \vdots \\ \vec{u^N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^0 \\ F^1 \\ \vdots \\ F^N \end{pmatrix} = 0$$

$\rightsquigarrow$ nichts gewonnen, aber parallele Struktur verloren

Numerischer Fluss als Matrixprodukt

- linearer Fluss auf $e = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_n$:

$$\int_e \widehat{\vec{a}u_h} \cdot \vec{n_e}\varphi_l = \sum_{j=1}^{k_i}\left(u_j^i \int_e \widehat{\vec{a}\varphi_j^i} \cdot \vec{n_e}\varphi_l\right) + \sum_{j=1}^{k_n}\left(u_j^n \int_e \widehat{\vec{a}\varphi_j^n} \cdot \vec{n_e}\varphi_l\right)$$

$$= \left(\cdots \underbrace{\int_e \widehat{\vec{a}\varphi_j^n} \cdot \vec{n_e}\varphi_l}_{j=1,\ldots,k_n} \cdots \underbrace{\int_e \widehat{\vec{a}\varphi_j^i} \cdot \vec{n_e}\varphi_l}_{j=1,\ldots,k_i} \cdots\right) \cdot \left(\cdots \vec{u^n} \cdots \vec{u^i} \cdots\right)$$

Numerischer Fluss als Matrixprodukt

- linearer Fluss auf $e = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_n$:

$$\int_e \widehat{\vec{a}u_h} \cdot \vec{n_e}\varphi_l = \sum_{j=1}^{k_i} \left(u_j^i \int_e \widehat{\vec{a}\varphi_j^i} \cdot \vec{n_e}\varphi_l \right) + \sum_{j=1}^{k_n} \left(u_j^n \int_e \widehat{\vec{a}\varphi_j^n} \cdot \vec{n_e}\varphi_l \right)$$

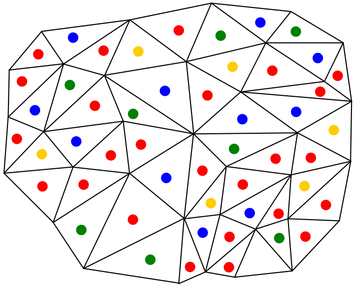
$$= \left(\cdots \underbrace{\int_e \widehat{\vec{a}\varphi_j^n} \cdot \vec{n_e}\varphi_l}_{j=1,\dots,k_n} \cdots \underbrace{\int_e \widehat{\vec{a}\varphi_j^i} \cdot \vec{n_e}\varphi_l}_{j=1,\dots,k_i} \cdots \right) \cdot \left(\cdots \vec{u^n} \cdots \vec{u^i} \cdots \right)$$

- $\rightsquigarrow \ \exists \hat{F} : F = \hat{F}\vec{u}$!
- globales System

$$M\vec{u_t} + K\vec{u} + \hat{F}\vec{u} = 0$$

Kanonische Parallelisierbarkeit

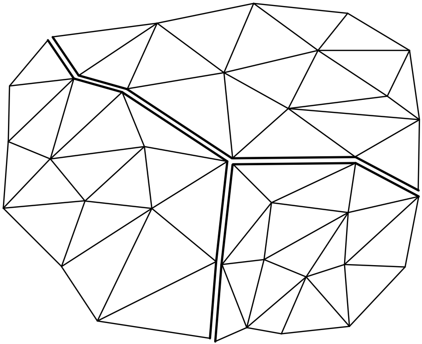
- naive Idee: Dreiecke irgendwie auf Prozessoren verteilen, durchrechnen lassen



- Parallelisierung effizient, wenn viel Rechnen und wenig Kommunikation
- Problem: nach jedem Zeitschritt Kommunikation notwendig $\rightsquigarrow$ Barriere

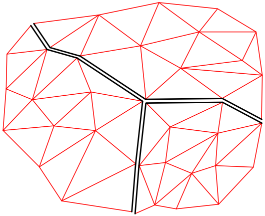
Partitionierung

Lösung: räumliche Partitionierung, Verteilung auf Prozessoren



Paralleler Algorithmus

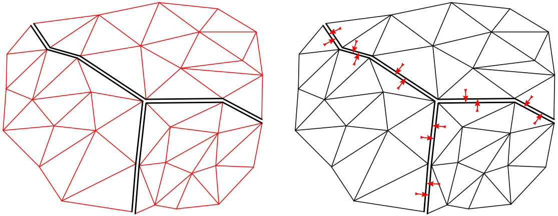
$$\vec{u_t} = -M^{-1}K\vec{u} - M^{-1}F$$



1. Fluss im Inneren berechnen

Paralleler Algorithmus

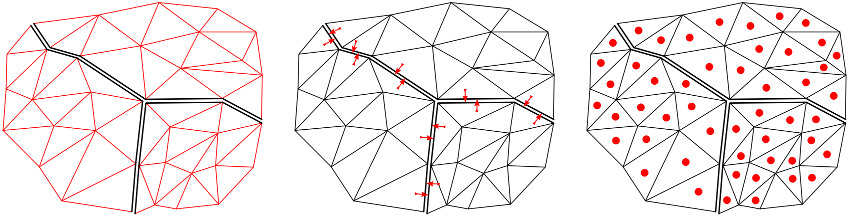
$$\vec{u_t} = -M^{-1}K\vec{u} - M^{-1}F$$



1. Fluss im Inneren berechnen
2. u-Werte des Randes an andere Partitionen senden (asynchron)

Paralleler Algorithmus

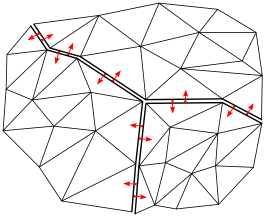
$$\vec{u_t} = -M^{-1}K\vec{u} - M^{-1}F$$



1. Fluss im Inneren berechnen
2. u-Werte des Randes an andere Partitionen senden (asynchron)
3. $M^{-1}K\vec{u}$ berechnen

Paralleler Algorithmus II

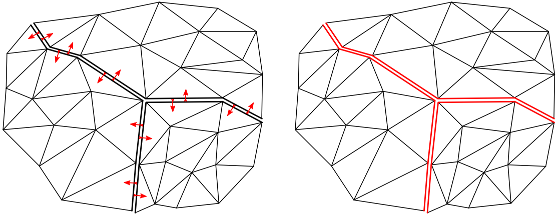
$$\vec{u_t} = -M^{-1}K\vec{u} - M^{-1}F$$



1. empfange u-Randwerte anderer Partitionen

Paralleler Algorithmus II

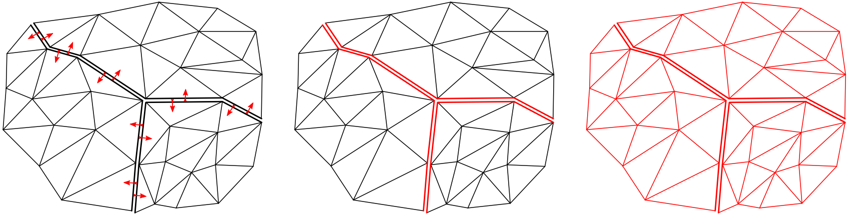
$$\vec{u_t} = -M^{-1}K\vec{u} - M^{-1}F$$



1. empfange u-Randwerte anderer Partitionen
2. Fluss an Partitionsgrenzen berechnen

Paralleler Algorithmus II

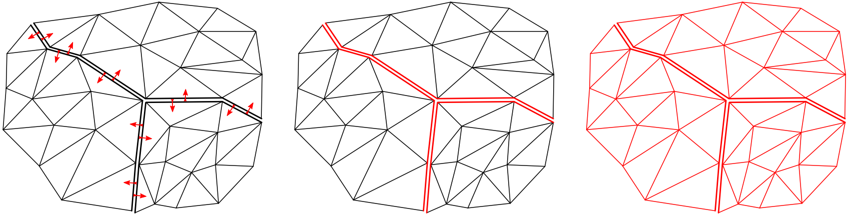
$$\vec{u}_t = -M^{-1}K\vec{u} - M^{-1}F$$



1. empfange u-Randwerte anderer Partitionen
2. Fluss an Partitionsgrenzen berechnen
3. $M^{-1}F$ berechnen

Paralleler Algorithmus II

$$\vec{u_t} = -M^{-1}K\vec{u} - M^{-1}F$$



1. empfange u-Randwerte anderer Partitionen
2. Fluss an Partitionsgrenzen berechnen
3. $M^{-1}F$ berechnen
4. Zeitintegration

Fazit

Freie Universität Berlin

Danke für’s Zuhören – Fragen?